MATEMÁTICAS II
OPCIÓN B

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<0\\ x^2-3x-1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

a) CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<0\rightarrow \text{Continua en}\,(-\infty,0)\\ x^2-3x-1 & \text{si } x\geq 0\rightarrow \text{Continua en}\,(0,+\infty)\end{cases}$$

- En x=0:

$$f(0)=0^2-3\cdot 0-1=-1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{-1}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-3x-1=-1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-1$$

Por tanto, f es continua en x=0.

Luego f es **continua** en $\mathbb{R}$.

Estudiamos la derivabilidad: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<0\rightarrow \text{Derivable en}\,(-\infty,0)\\ x^2-3x-1 & \text{si } x\geq 0\rightarrow \text{Derivable en}\,(0,+\infty)\end{cases}$

- En x=0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{x-1}-(-1)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{x-1}+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-3x-1-(-1)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x-3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x-3=-3\end{cases}$$

Luego f no es derivable en x=0. Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$.

b) ASÍNTOTAS:

HORIZONTALES

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-3x-1\right)=+\infty\Rightarrow \text{no tiene A.H. en}+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-\infty}=0\Rightarrow f\text{ tiene a } y=0 \text{ como A.H. en}-\infty.$$

VERTICALES

No tiene asíntotas verticales, ya que no posee puntos de discontinuidad.

OBLICUAS

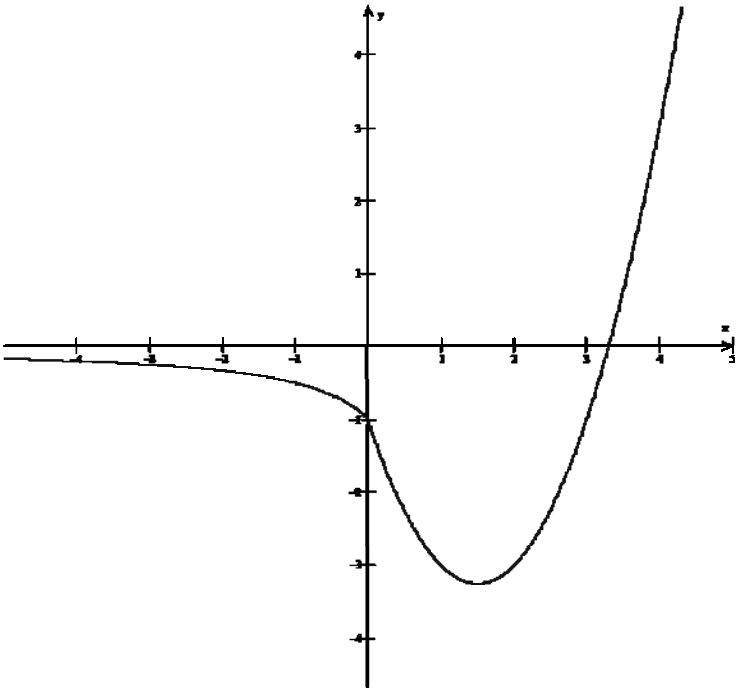
Vamos a ver si tiene en $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x-1}{x} = +\infty \Rightarrow \text{no tiene A.O. en} + \infty.$$

c) ESBOZA LA GRÁFICA DE F:

A la izquierda de 0 sabemos que y=0 es una asíntota horizontal, a la derecha es una parábola, vamos a calcular su vértice y puntos de corte, y también sabemos que es continua en x=0:

$$x^2-3x-1 \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} V_x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{2} = 1'5 \\ V_y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\dfrac{3}{2} - 1 = -\dfrac{13}{4} = -3'25 \end{cases} \Rightarrow \text{Vértice en}\,(1'5, -3'25) \\ \text{Puntos Corte} \begin{cases} \text{Eje OX} \rightarrow x^2-3x-1=0 \Rightarrow x = \dfrac{3\pm\sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \simeq 3'30 \Rightarrow (3'30, 0) \\ \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \simeq -0'30 \Rightarrow (-0'30, 0) \end{array} \right. \\ \text{Eje OY} \rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1) \end{cases} \end{cases}$$



2. Considera la curva de ecuación $y=x^3-3x$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abcisa $x=-1$.

La ecuación de la recta tangente en x=-1 es $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x-(-1))$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x-(-1)) \\ f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=-1+3=2 \\ f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(-1)=3(-1)^2-3=3-3=0 \end{array}\right\} y-2=0\cdot(x+1)\Rightarrow y-2=0$$

Luego la recta tangente es y=2.

b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta y=2.

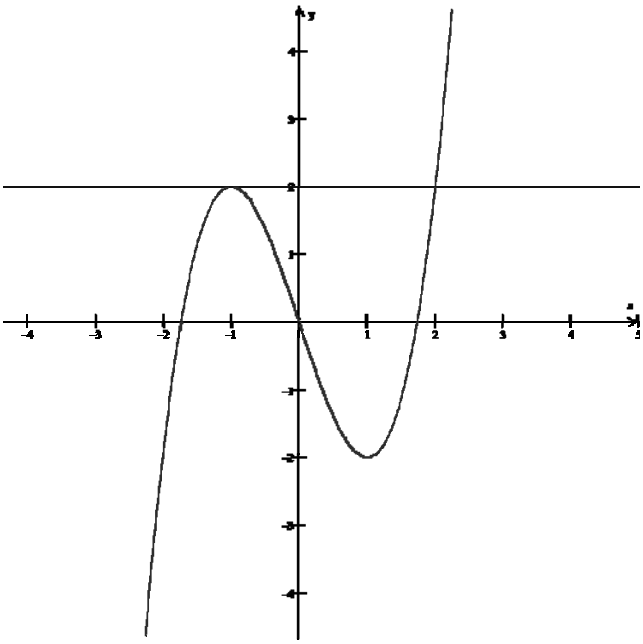
En primer lugar esbozamos la gráfica de la curva. Los puntos de corte con los ejes:

$$\text{eje } OX\rightarrow x^3-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow x=0;x=3\Rightarrow(0,0)\text{ y }(3,0)$$
$$\text{eje } OY\rightarrow(0,0)$$

Ahora vamos a calcular la monotonía:

$$f'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\rightarrow\begin{cases}(-\infty,-1)\rightarrow f'(-2)=9>0\Rightarrow f\text{ es creciente}\\(-1,1)\rightarrow f'(0)=-3>0\Rightarrow f\text{ es decreciente}\\(1,+\infty)\rightarrow f'(2)=9>0\Rightarrow f\text{ es creciente}\end{cases}$$

Luego, f tiene MÁXIMO en $(-1,2)$ y MÍNIMO en $(1,-2)$.



Por tanto, el área del recinto viene dada por la integral:

$$\int_{-1}^{2}\left(2-\left(x^3-3x\right)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(2-x^3+3x\right)dx=2x-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2}=\left(4-\frac{16}{4}+\frac{12}{2}\right)-\left(-2-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4}=6'75\,u^2$$

3. UNA EMPRESA ENVASADORA HA COMPRADO UN TOTAL DE 1500 CAJAS DE PESCADO EN TRES MERCADOS DIFERENTES, A UN PRECIO POR CAJA DE 30, 20 Y 40 € RESPECTIVAMENTE. EL COSTE TOTAL DE LA OPERACIÓN HA SIDO DE 40500 €. CALCULA CUÁNTO HA PAGADO LA EMPRESA EN CADA MERCADO, SABIENDO QUE EN EL PRIMERO DE ELLOS SE HA COMPRADO EL 30% DE LAS CAJAS.

Llamamos x, y, z al número de cajas de cada mercado respectivamente. Entonces el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x+y+z=1500 \\ 30x+20y+40z=40500 \\ x=450 \ (30\% \text{ de } 1500) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=1050 \\ 20y+40z=27000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=1050 \\ y+2z=1350 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} -y-z=-1050 \\ y+2z=1350 \\ \hline z=300 \end{array} \Rightarrow y=1050-300=750$$

Por tanto, el nº de cajas del 1er mercado es 450, del 2º 750, del 3er, 300. Luego en cada mercado se han pagado:

1er mercado: $30\cdot 450=13500$ €
2º mercado: $20\cdot 750=15000$ €
3er mercado: $40\cdot 300=12000$ €

4. CONSIDERA LA RECTA R Y LA RECTA S:

a) ESTUDIA LA POSICIÓN RELATIVA DE AMBAS RECTAS.

$$r\equiv\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1,0,-1) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas son:

$$\vec{v_r}=(1,1,0)\times(0,1,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-1,1)$$

$$\vec{v_s}=\overrightarrow{BA}=(1,1,1)$$

Estudiamos su posición:

$$\vec{v_r} \nparallel \vec{v_s} \Rightarrow \text{No son paralelas}$$

$$\det\left(\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{BA}\right)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1+1-1-1-1=-4\neq 0$$

Por tanto, las rectas se cruzan.

b) DETERMINA UN PUNTO C DE LA RECTA R TAL QUE LOS SEGMENTOS CA Y CB SEAN PERPENDICULARES.

$$C \in r \Rightarrow C(2+a,-a,a) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (2-2-a,1+a,0-a) = (-a,1+a,-a) \\ \overrightarrow{CB} = (1-2-a,0+a,-1-a) = (-1-a,a,-1-a) \end{cases}$$

Para que sean perpendiculares:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow a + a^2 + a + a^2 + a + a^2 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 3a = 0 \Rightarrow 3a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

Luego el punto C puede ser (2,0,0) ó (1,1,-1).